

**Работа на конкурс «Свободный полет» 2011 года
Благотворительного фонда «Новая мысль»**

«РАСКРАСКИ БИНАРНЫХ МАТРИЦ»

Дьяконов Александр Геннадьевич

31 год (дата рождения: 13.07.1979)

г. Королёв Московской области,

djakonov@mail.ru (<http://alexanderdyakonov.narod.ru/>)

Рассматриваемые в данной работе задачи связаны с разделом теории интерполяции, в котором изучаются представления функций в специальном виде, в частности, в виде суммы функций меньшего числа переменных. Подобные представления интенсивно изучались в математике (можно назвать работы С.П. Дилиберто, Е.Г. Страуса, А.Г. Витушкина, В.И. Арнольда, А.Н. Колмогорова, Ю.П. Офмана, С.Я. Хавинсона, В.А. Медведева¹), но рассмотренные здесь задачи, в которых функции принимают значения из множества $GF(2) = \{0,1\}$ (и сложение происходит по модулю два), остались без должного внимания, по-видимому, из-за отсутствия явных приложений. Тем не менее, автор считает, что нашёл интересное направление исследований, поскольку

- 1) задачи допускают простые постановки, что позволяет легко объяснить их даже школьнику,
- 2) задачи и решения имеют красивые геометрические интерпретации, что вызывает к ним дополнительный интерес,
- 3) техника, применяемая при решении, охватывает много важных разделов математики (здесь и теория графов, и теория групп, причём «без залезания в дебри»),
- 4) решения позволяют по-новому взглянуть на результаты в смежных областях (в том числе, имеющих приложения),
- 5) постановки задач допускают различные обобщения, что открывает целый класс новых проблем.

Автор надеется, что работа будет размещена на сайте фонда «Новая мысль» в открытом доступе, поэтому постарался заинтересовать читателя, сделать максимально понятными постановки рассматриваемых задач и задач, решения которых остались за рамками работы. По этой причине задачи излагаются в терминах «геометрических операций» над матрицами, сначала «обычными» – двумерными, а затем трёхмерными и многомерными. Предложенные методы решения допускают иллюстрации, которые приведены в работе (хотя многие решения можно получить «чистой» алгебраической техникой).

Для сокращения объёма и удобства, ссылки на литературу сделаны подстрочными, автор постарался избежать лишнего формализма и максимально проиллюстрировать доказательства. Из-за ограничения по объёму (10 страниц) пришлось пожертвовать некоторыми доказательствами (наверное, это не сильно испортило работу).

¹ Работы А.Г. Витушкина, В.И. Арнольда и А.Н. Колмогорова посвящены 13й проблеме Гильберта, поэтому в них рассматриваются вопросы представления функции в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных. Остальные авторы исследовали именно суммы функций меньшего числа переменных. Библиографию можно найти, например, в В. Э. Исмаилов *О методах вычисления точного значения наилучшего приближения суммами функций одной переменной // Сибирский математический журнал, 2006. – Т. 47, № 5. – С.1076–1082.*

Рассмотрим матрицу размера $a \times b$ с элементами из множества $\{0,1\}$, её легко изобразить в виде матрицы пикселей (см. рис.1), в которой единичным элементам соответствуют закрашенные пиксели. Предположим, что изначально наша матрица полностью незакрашена (т.е. состоит из нулей), мы можем выполнить конечное число инверсий столбцов и строк, т.е. выбрав, например, какой-то столбец мы все его закрашенные пиксели делаем незакрашенными, а все незакрашенные закрашенными (это соответствует переходу от столбца \tilde{x} к столбцу $(1, \dots, 1)^T \oplus \tilde{x}$, здесь и далее \oplus – сложение по модулю два). На рис. 1 показано последовательное выполнение трёх инверсий.

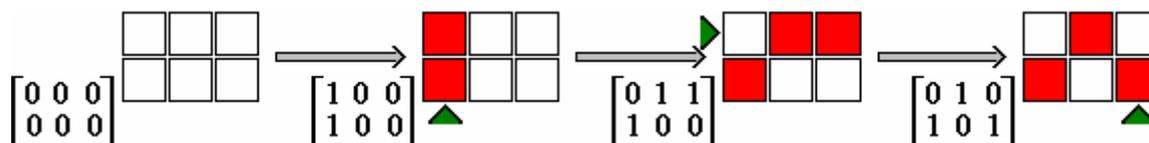


Рис. 1. Раскраска матрицы (три инверсии).

Полученные в результате таких инверсий матрицы, будем называть их допустимыми раскрасками (матрицами), описываются достаточно простой формулой:

$$\|\alpha_i \oplus \beta_j\|_{a \times b}, (\alpha_1, \dots, \alpha_a) \in \{0,1\}^a, (\beta_1, \dots, \beta_b) \in \{0,1\}^b. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что допустимые раскраски описывают значения функции

$$\varphi(x_1, x_2) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2), x_1 \in \{1, 2, \dots, a\}, x_2 \in \{1, 2, \dots, b\},$$

($\varphi(i, j)$ – ij -й элемент раскраски) т.е. функции от двух переменных, которая представима в виде суммы функций всего одного переменного.

1. КАКИЕ МАТРИЦЫ ЯВЛЯЮТСЯ ДОПУСТИМЫМИ РАСКРАСКАМИ

В принципе, ответ дан формулой (1), но нас везде в этой работе будут интересовать геометрические критерии (которые можно «показать на картинке»), что предъявляет определённые требования к решениям. Рассмотрим матрицы размера 2×2 . На рис. 2 показаны все допустимые раскраски, а на рис. 3 – все недопустимые. Оказывается, что они описывают и общий $a \times b$ -случай:

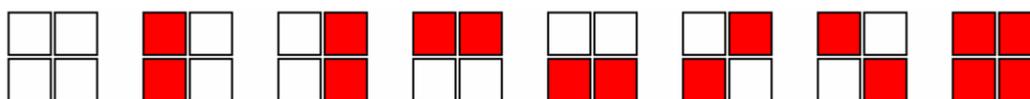


Рис. 2. Все допустимые раскраски 2x2-матриц.



Рис. 3. Все недопустимые раскраски 2x2-матриц.

Теорема 1. Матрица является допустимой раскраской тогда и только тогда, когда все её 2×2 -подматрицы являются допустимыми раскрасками (т.е. из рис. 2).

Доказательство. Заметим, что все допустимые 2×2 -матрицы $\|h_{ij}\|_{2 \times 2}$ рис. 2 можно описать следующим образом: $h_{11} \oplus h_{22} = h_{12} \oplus h_{21}$ или ещё проще – в них чётное число закрашенных пикселей. Очевидно, что все 2×2 -подматрицы допустимой раскраски являются допустимыми раскрасками (т.е. матрицами рис. 2). Пусть теперь все 2×2 -подматрицы матрицы $\|h_{ij}\|_{a \times b}$ допустимы, тогда $h_{ij} = h_{i1} \oplus h_{1j} \oplus h_{i1}$ для всех i, j . Нетрудно проверить, что матрица получается из нулевой – инверсией столбцов с номерами из $\{j \in \{1, 2, \dots, b\} | h_{1j} = 1\}$ и строк с номерами из $\{i \in \{2, 3, \dots, a\} | h_{i1} = 1\}$, поэтому реализуется допустимой раскраской. Теорема доказана.

Замечание. В формулировке теоремы можно рассматривать только 2×2 -подматрицы

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{1j} \\ h_{i1} & h_{ij} \end{pmatrix}.$$

Кстати, всего бинарных $a \times b$ -матриц 2^{ab} , а допустимых раскрасок – 2^{a+b-1} .

2. КАКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА МАТРИЦЫ МОЖНО РАСКРАСИТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБРАЗОМ

Несмотря на то, что не все 2×2 -матрицы являются допустимыми раскрасками, можно произвольным образом раскрасить любые 3 пикселя 2×2 -матрицы, см. рис. 4.

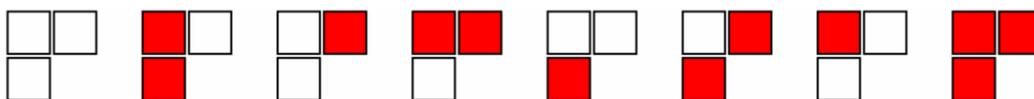


Рис. 4. Произвольные раскраски подмножества матрицы.

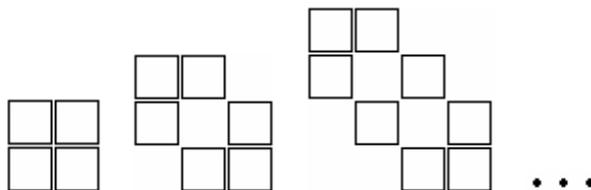


Рис. 5. «Плохие» множества для произвольных закрасок.

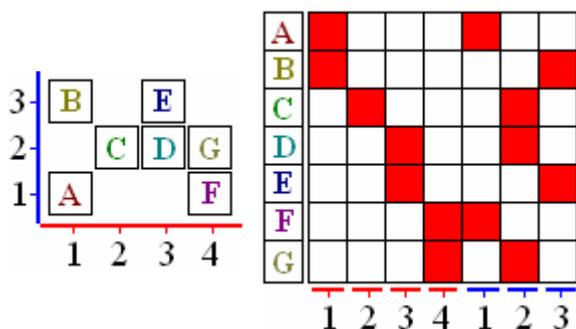


Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Теорема 2. Все раскраски множества являются допустимыми тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного подмножества из тех, что перечислены на рис. 5 (с точностью до перестановок строк и столбцов матрицы).

Доказательство. Ниже мы установим более общий факт (см. теорему 3), а пока заметим, что эту теорему можно доказать следующим образом. Пусть дано какое-то s -элементное подмножество $a \times b$ -матрицы² (см., например, рис. 6), по нему можно составить $s \times (a+b)$ -матрицу, столбцы которой соответствуют всевозможным инверсиям строк и столбцов (рис. 7). Всем допустимым раскраскам нашего множества соответствуют линейные комбинации столбцов такой матрицы. Все раскраски реализуются тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен s . Ранги бинарных матриц над полем $\text{GF}(2)$, в каждой строке которых ровно две единицы (а у нас именно такая матрица), изучались в [Зыков, 1969³]. Если матрице сопоставить граф (как показано на рис. 8), соединяя рёбрами номера столбцов, которые записаны в одной строке, то ранг равен s тогда и только тогда, когда в нём нет циклов. Циклы как раз и соответствуют множествам рис. 5: цикл длины 4 – первому, длины 6 – второму и т.д. Например, цикл на рис. 9 соответствует подмножеству, показанному на рис. 10 (это второе множество рис. 5 с точностью до перестановки столбцов). Теорема доказана.

² Точнее: подмножество элементов матрицы.

³ Зыков А.А. *Теория конечных графов I Наука, Сибирское отделение, 1969, 543с.* См. гл. 3, §25.

3. НАСКОЛЬКО ТОЧНО МОЖНО РЕАЛИЗОВАТЬ КАРТИНКУ С ПОМОЩЬЮ ДОПУСТИМЫХ РАСКРАСОК

Допустим, есть какая-то картинка (бинарная $a \times b$ -матрица). В общем случае её нельзя получить допустимой раскраской, но можно получить похожую картинку, см. рис. 11. Чем в меньшем числе пикселей они различаются, тем лучше. Для произвольной матрицы $D = \|d_{ij}\|_{a \times b}$ существует такая матрица $H = \|h_{ij}\|_{a \times b}$ из множества допустимых матриц (раскрасок) H^* , что число единиц в матрице $\|h_{ij} \oplus d_{ij}\|_{a \times b}$ минимально (это и есть число пикселей, в которых различаются D и H). Пусть это минимальное число единиц равно $g(a, b, D)$. Далее мы будем пользоваться тем, что это минимальное число закрашенных пикселей в матрице, которая получается из D применением конечного числа инверсий (минимум берётся по всем конечным последовательностям инверсий строк и столбцов). Найдём

$$\psi(a, b) = \max_D g(a, b, D),$$

где максимум берётся по всем матрицам размера $a \times b$. Это значение равно максимальной ошибке, которую можно допустить при самой оптимальной реализации произвольной $a \times b$ -картинки. Ясно, что $\psi(a, b) = \psi(b, a)$.

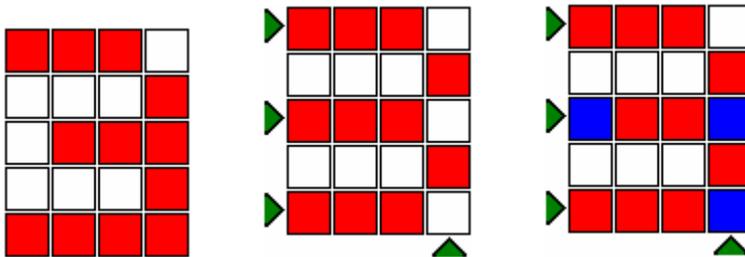


Рис. 11. Картинка, её приближённая допустимая раскраска и ошибка приближения.

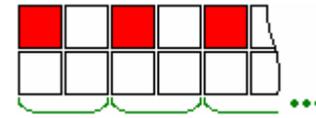


Рис. 12. «Худший случай».



Рис. 13. Обнуление 1-й строки.

Случай $a = 1$. Очевидно, что $\psi(1, b) = 0$ для всех натуральных b , поскольку на полоске размером 1 пиксель на b пикселей можно реализовать любую картинку. Закраска столбцов здесь эквивалентна закраске отдельных пикселей.

Случай $a = 2$. В $2 \times b$ -матрице на рис. 12 последовательные 2×2 -подматрицы имеют нечётное число закрашенных пикселей, поэтому на каждой из них будет сделана как минимум одна ошибка при реализации допустимой раскраской. Поэтому

$$\psi(2, b) \geq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor, \text{ т.к. } \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - \text{число таких подматриц } (\lfloor \cdot \rfloor - \text{целая часть снизу}).$$

Заметим, что если столбец полностью закрашен, то его можно инвертировать (понижив число закрашенных пикселей), а если он равен $(1, 0)^T$, то его можно инвертировать и превратить в $(0, 1)^T$ (оставив число закрашенных пикселей прежним), см. рис. 13. Поэтому инверсиями столбцов можно привести рисунок к матрице, в которой первая строка нулевая. Инвертируем вторую строку, если в ней больше половины закрашенных пикселей и получаем матрицу с не более чем $\lfloor b/2 \rfloor$ закрашенными пикселями. Таким образом,

$$\psi(2, b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor \text{ и, следовательно, } \psi(2, b) = \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor.$$

Случай $a = 3$. Теперь рассмотрим матрицу размера $3 \times b$. Рассуждая аналогично, можно допустимыми раскрасками прийти к матрице, в которую входят лишь столбцы $\tilde{0} = (0, 0, 0)^T$, $\tilde{1} = (1, 0, 0)^T$, $\tilde{2} = (0, 1, 0)^T$, $\tilde{3} = (0, 0, 1)^T$, см. рис. 14. Рассмотрим раскраску (инверсию) I_1 первой строки, пополненную инверсиями рис. 14, см. рис. 15. Столбец $\tilde{2}$

(если он, конечно, есть в матрице) переходит в столбец $\tilde{3}$ (и наоборот), также столбцы $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ меняются местами (см. также рис. 16).

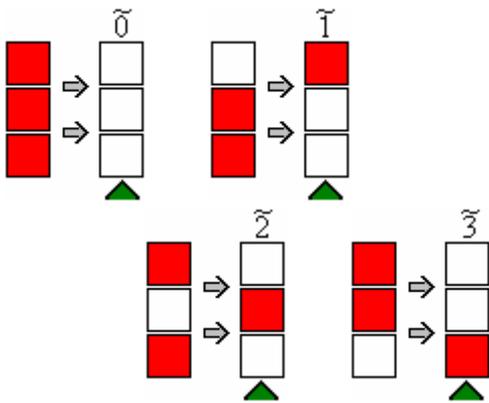


Рис. 14. Инверсии, уменьшающие число закрашенных пикселей.

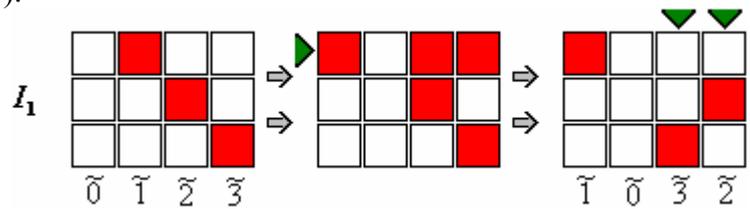


Рис. 15. Инверсия первой строки + инверсии столбцов.

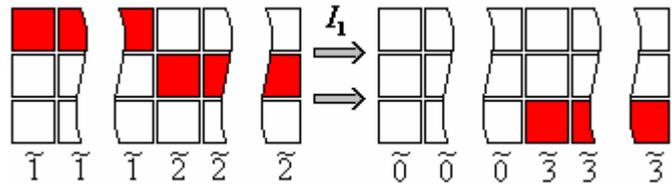


Рис. 16.

Схематично раскраски всех строк можно записать следующим образом

$$I_1 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{1}, \\ \tilde{2} \leftrightarrow \tilde{3}, \end{cases} \quad I_2 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{2}, \\ \tilde{1} \leftrightarrow \tilde{3}, \end{cases} \quad I_3 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{3}, \\ \tilde{1} \leftrightarrow \tilde{2}. \end{cases}$$

Эти преобразования (вместе с тождественным) образуют четверную группу Клейна⁴ ($V_4 = Z_2 \times Z_2$), геометрически они «выглядят» как симметрии прямоугольника, который не является квадратом (рис. 17). В нашем случае вершины квадрата помечены весами (число пикселей в соответствующих столбцах). Группа показывает, что нужно сделать, чтобы допустимыми раскрасками уменьшить число закрашенных пикселей до $g(a, b, D)$. Пусть, например, в матрицу входят только столбцы $\tilde{1}$ и $\tilde{2}$, причём столбцов $\tilde{1}$ не меньше, чем столбцов $\tilde{2}$, тогда преобразованием I_1 «зануляем» столбцы $\tilde{1}$, см. рис. 16. Ясно, что меньшее число закрашенных пикселей мы не получим, т.к. любая допустимая раскраска есть применение инверсий строк и столбцов, а раскраска, которая получает $g(a, b, D)$ закрашенных пикселей – применение инверсий строк и инверсий рис. 14 (в конечном счете, является элементом нашей группы).

Итак, в $3 \times b$ -матрице при $b \geq 4$ в «худшем случае» входят все столбцы $\tilde{0}$, $\tilde{1}$, $\tilde{2}$, $\tilde{3}$, в $\tilde{0}$ -столбцы мы переводим столбцы, которых больше, поэтому

$$\psi(3, b) = \left\lfloor \frac{3b}{4} \right\rfloor. \quad (2)$$

При $b = 3$ в худшем случае у нас три разных столбца, один всегда можно занулить, поэтому $\psi(3, 3) = 2$, что, впрочем, согласуется с формулой (2), а случаи $b \leq 2$ уже разобраны.

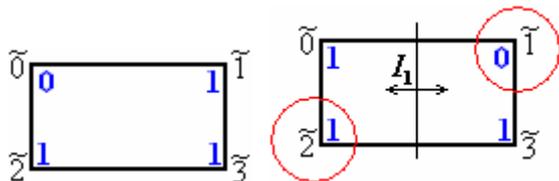


Рис. 17. Прямоугольник (с весами).

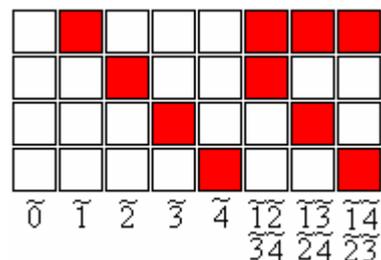


Рис. 18.

⁴ см. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. Часть II. Линейная алгебра. Часть III. Основные структуры алгебры: Учебник для вузов (в 3-х томах). М.: Физико-математическая литература, 2000.

Случай $a=4$. Аналогично рассмотрим матрицу размера $4 \times b$. Здесь уже без ограничения общности (допустимыми раскрасками этого можно добиться) матрица состоит из столбцов $\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{1}\tilde{2}, \tilde{1}\tilde{3}, \tilde{1}\tilde{4}$, см. рис. 18. Кстати, столбец $\tilde{1}\tilde{2}=(1100)$ с точностью до инверсии равен столбцу $\tilde{3}\tilde{4}=(0011)$, числа закрашенных пикселей в них тоже совпадают, поэтому на рис. 18 приведено несколько обозначений. Пополненные раскраски строк здесь запишутся следующим образом:

$$I_1 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{1}, \\ \tilde{2} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{2} = \tilde{3}\tilde{4}, \\ \tilde{3} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{3} = \tilde{2}\tilde{4}, \\ \tilde{4} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{4} = \tilde{2}\tilde{3}, \end{cases} \quad I_2 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{2}, \\ \tilde{1} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{2} = \tilde{3}\tilde{4}, \\ \tilde{3} \leftrightarrow \tilde{2}\tilde{3} = \tilde{1}\tilde{4}, \\ \tilde{4} \leftrightarrow \tilde{2}\tilde{4} = \tilde{1}\tilde{3}, \end{cases} \quad I_3 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{3}, \\ \tilde{1} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{3} = \tilde{2}\tilde{4}, \\ \tilde{2} \leftrightarrow \tilde{2}\tilde{3} = \tilde{1}\tilde{4}, \\ \tilde{4} \leftrightarrow \tilde{3}\tilde{4} = \tilde{1}\tilde{2}, \end{cases} \quad I_4 = \begin{cases} \tilde{0} \leftrightarrow \tilde{4}, \\ \tilde{1} \leftrightarrow \tilde{1}\tilde{4} = \tilde{2}\tilde{3}, \\ \tilde{2} \leftrightarrow \tilde{2}\tilde{4} = \tilde{1}\tilde{3}, \\ \tilde{3} \leftrightarrow \tilde{3}\tilde{4} = \tilde{1}\tilde{2}. \end{cases}$$

Эти преобразования также являются образующими группы (на самом деле это группа $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$, см. [Кострикин, 2000] но этот факт нам не понадобится). Если изобразить куб как на рис 19, то первые три раскраски – симметрии куба относительно плоскостей, параллельных двум граням и перпендикулярных остальным четырём (на рис. 19 показана симметрия I_2), а четвёртая раскраска – центральная симметрия (противоположные вершины куба переходят друг в друга).

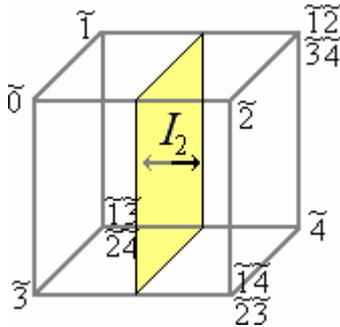


Рис. 19.

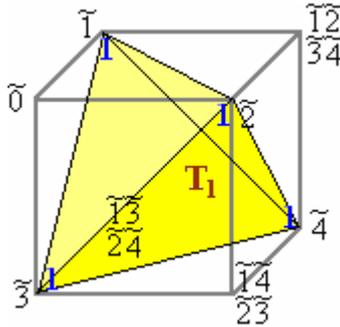


Рис. 20.

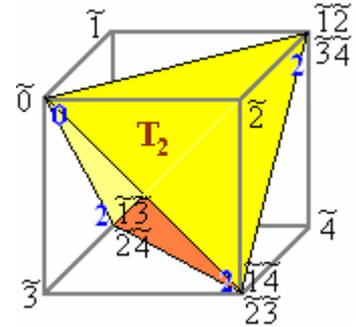


Рис. 21.

Заметим, что при любых действиях элементов группы множество вершин куба $T_1 = \{\tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}, \tilde{4}\}$ (вершины тетраэдра рис. 20) переходит в себя или целиком переходит во множество $T_2 = \{\tilde{0}, \tilde{1}\tilde{2}, \tilde{1}\tilde{3}, \tilde{1}\tilde{4}\}$ (вершины тетраэдра рис. 21) и наоборот. Вершины первой группы имеют веса 1, 1, 1, 1 (по числу закрашенных пикселей в столбцах), а второй – 0, 2, 2, 2. Теперь ясно, как вычислять $\psi(4, b)$. При $b=4$, если все вершины лежат в одном T_i -множестве, то его надо перевести в T_1 , тогда число закрашенных пикселей $1+1+1+1$, если 3 вершины в одном, а 1 – в другом, то «обнуляем» эту одну вершину и число закрашенных пикселей будет $3 = (1+1+1) + (0)$, если по 2 вершины в каждом T_i -множестве, то обнуляем одну из них и число закрашенных пикселей $4 = (1+1) + (0+2)$. Поэтому при $b=4$ остаётся самое большое 4 незакрашенных пикселя и $\psi(4,4)=4$. Эти рассуждения схематично показаны на рис.22. На рис. 23 разобран случай $b=5$, $\psi(4,5)=5$, а на рис. 24 – $b=6$, $\psi(4,6)=7$. Аналогично, $\psi(4,7)=8$, $\psi(4,8)=10$, и вообще получаются все значения $\psi(4, b)$, «красивой» формулы для этих значений нет, но справедлива оценка

$$\psi(4, b) \leq \left\lfloor \frac{5}{4} b \right\rfloor.$$

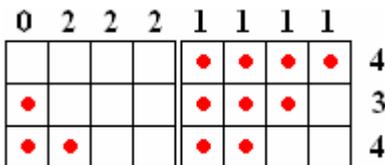


Рис. 22.

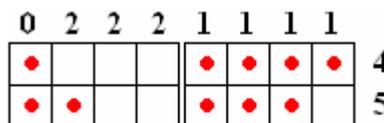


Рис. 23.

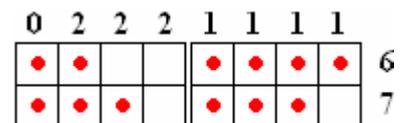


Рис. 24.

ψ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
3	0	1	2	3	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	11
4	0	2	3	4	5	7	8	10	10	12	13	14	15	17	18

Табл. 1. Найденные значения $\psi(a, b)$.

Проблема. Продолжить заполнение таблицы 1.

4. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь трёхмерные матрицы. На рис. 25 показана матрица размера $3 \times 3 \times 2$ (и «направления размерностей» – на рисунках они будут «нестандартными»). Рассмотрим три разных способа раскраски матриц. Первый – по слоям, т.е. по двумерным подматрицам, показан на рис. 25. Для $a \times b \times c$ -матрицы $\|d_{ijt}\|_{a \times b \times c}$ выбирается размерность (одна из трёх), пусть, например, первая, выбирается значение индекса i^* , в данном случае от 1 до a , и осуществляется переход к матрице $\|h_{ijt}\|_{a \times b \times c}$:

$$h_{ijt} = \begin{cases} d_{ijt} \oplus 1, & i = i^*, \\ d_{ijt}, & i \neq i^*. \end{cases}$$

Такие раскраски (все матрицы, которые получаются из нулевой с помощью конечного числа описанных инверсий двумерных матриц) соответствуют всевозможным значениям функций вида

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) \oplus f_3(x_3), \quad x_1 \in \{1, 2, \dots, a\}, \quad x_2 \in \{1, 2, \dots, b\}, \quad x_3 \in \{1, 2, \dots, c\},$$

т.е. которые представимы в виде суммы по модулю два функций от одного переменного.

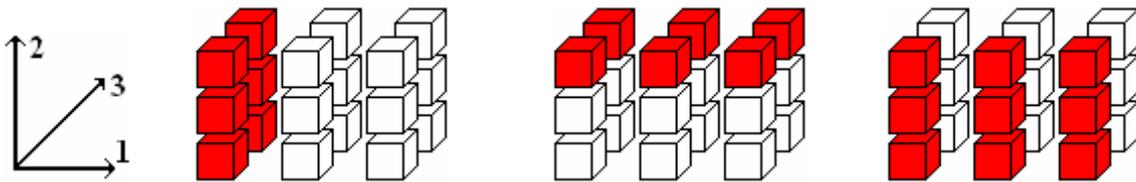


Рис. 25. Простейшие 1-раскраски трёхмерных матриц.

Второй способ раскраски – по одномерным подматрицам, показан на рис. 26. Для $a \times b \times c$ -матрицы $\|d_{ijt}\|_{a \times b \times c}$ выбираются две размерности (из трёх), пусть, например, первая и вторая, в них выбираются значения индексов i^* , j^* и осуществляется переход к матрице $\|h_{ijt}\|_{a \times b \times c}$:

$$h_{ijt} = \begin{cases} d_{ijt} \oplus 1, & i = i^*, j = j^*, \\ d_{ijt}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такие раскраски соответствуют всевозможным значениям функций вида

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = f_{1,2}(x_1, x_2) \oplus f_{2,3}(x_2, x_3) \oplus f_{1,3}(x_1, x_3), \quad x_1 \in \{1, \dots, a\}, \quad x_2 \in \{1, \dots, b\}, \quad x_3 \in \{1, \dots, c\},$$

т.е. которые представимы в виде суммы по модулю два функций от двух переменных.

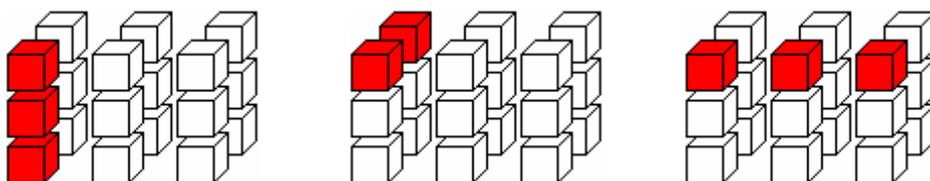


Рис. 26. Простейшие 2-раскраски трёхмерных матриц.

Третий способ раскраски – по отдельным пикселям – соответствует представлению функции в виде функции от трёх переменных. Ясно, что такое представление всегда

возможно и здесь результаты тривиальны (инверсией отдельных пикселей можно получить любую матрицу).

Очевидно также, как распространяются определения раскрасок на большее число размерностей. Раскраску n -мерной матрицы по $(n-k)$ -мерным подматрицам будем называть k -раскраской. Подматрицу размера $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2\}$ (а точнее матрицу с единицами в этих позициях) назовём k -мерным кубом, где k – число двоек среди a_1, a_2, \dots, a_n . На рис. 27–28 изображены 2-мерные кубы или, как они здесь названы, квадраты, кроме того, изображены суммы (по модулю два) таких квадратов. Нетрудно видеть, что все конфигурации рис. 5 являются суммами конечного числа таких квадратов на плоскости (и только они с точностью до перестановки строк и столбцов, если не брать в расчет пустую конфигурацию). Оказывается, имеет место следующая теорема, которая раскрывает «геометрический смысл» произвольно раскрашиваемых множеств.

Теорема 3. *Все раскраски множества являются допустимыми k -раскрасками тогда и только тогда, когда оно не содержит множество закрашенных пикселей ненулевой суммы (по модулю два) $(k+1)$ -мерных кубов.*

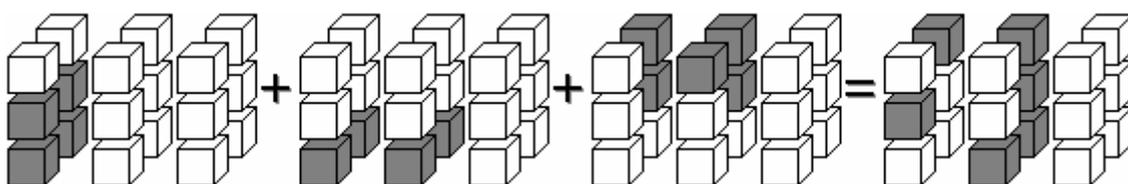


Рис. 27. Сумма двумерных квадратов.

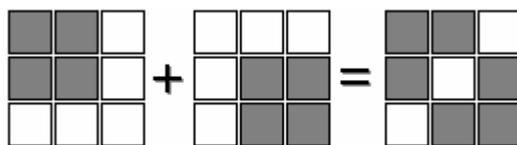


Рис. 28. Сумма двумерных квадратов на плоскости.

Отметим, что для $k = 1$ и обычного сложения аналогичный критерий получен в работе [Reid, Sun⁵]. Проблема получения этого критерия стояла с момента выхода работ [Schoenberg⁶], т.е. более 55 лет! Здесь мы не просто рассмотрели случай сложения по модулю два, но и обобщили критерий на произвольные размерности (что сделано впервые)! При этом способ доказательства проще и нагляднее, чем в работе [Reid, Sun] (там доказательство проведено по индукции).

Поскольку всё формальное доказательство явно не уместится на оставшихся страницах, рассмотрим подробно частный случай, когда матрица имеет размеры $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n$, а затем покажем (не слишком подробно), как к нему сводится общий случай. На рис.29 показана такая матрица при $n = 3$. Каждому элементу матрицы сопоставляется набор из $\{0,1\}^n$, на рис. 29 элементы пронумерованы таким образом, что бинарные представления номеров образуют множество $\{0,1\}^n$. Рассмотрим все 2^n -мерные векторы, которые соответствуют 1-

⁵ Reid L., Sun X. *Distance matrices and ridge function interpolation* // *Canadian Journal of Mathematics*. – 1993. – V. 45. – pp. 1313–1323.

⁶ I.J. Schoenberg *On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space* // *Ann. Math.* 38 (1937), 787–793. I.J. Schoenberg *Metric spaces and positive definite functions* // *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938), 522–536. I.J. Schoenberg *Metric spaces and completely monotone functions* // *Ann. Math.* 39 (1938), 811–841. См. также Деза М.М., Лоран М. *Геометрия разрезов и метрик*. – М.: МЦНМО, 2001. – 736с.

раскраскам, см. табл.2. Они линейно зависимы (при $n \geq 2$), базис в пространстве линейных комбинаций 1-закрасок составляют вектор из одних 1 (сам он образует базис пространства 0-раскрасок) вместе с векторами, которые представляют значения булевых функций x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, см. табл. 3. Чтобы получить базис пространства линейных комбинаций 2-раскрасок, надо добавить векторы, соответствующие булевым функциям $x_i x_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Это всевозможные мономы степени 2.

	\bar{x}_3	x_3	\bar{x}_2	x_2	\bar{x}_1	x_1
0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	0	1
4	0	1	1	0	1	0
5	0	1	1	0	0	1
6	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	1	0	1

Табл. 2.

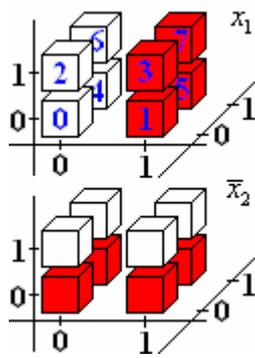


Рис. 29.

	1	$x_3 x_2$	x_1	$x_2 x_1$	$x_3 x_1$	$x_2 x_1$	$x_3 x_2 x_1$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1
4	1	1	0	0	0	0	0
5	1	1	0	1	0	1	0
6	1	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1

Табл. 3.

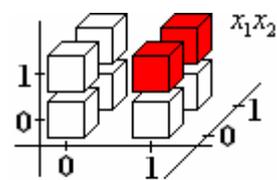
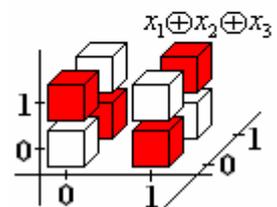


Рис. 30.



Нетрудно доказать, что

- 1) базис пространства линейных комбинаций k -раскрасок составляют всевозможные мономы степени не выше k , а сами раскраски, таким образом, соответствуют полиномам степени не выше k ,
- 2) геометрически полиномам степени не выше k соответствуют всевозможные суммы булевых подкубов размерности не ниже $n-k$ (см. рис. 29–30) или, можно сказать, размерности ровно $n-k$, поскольку булев подкуб размерности $r+1$ есть сумма двух непересекающихся подкубов размерности r ,
- 3) базис ортогонального пространства к пространству линейных комбинаций k -закрасок при этом составляют мономы степени не выше $n-k-1$ (здесь скалярное произведение векторов берётся по модулю два),
- 4) геометрически ортогональному пространству соответствуют всевозможные суммы булевых подкубов размерности $k+1$ (не ниже $k+1$).

Это достаточно тривиальные утверждения, например (3) и (4) следуют из (2), поскольку пересечение куба размерности $r_1 \geq n-k$ и куба размерности $r_2 \geq k+1$ есть булев куб размерности $r \geq 1$, т.е. содержащий чётное число вершин, поэтому скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю. Они позволяют решать многие известные задачи, например из [Логачёв и др., 2004⁷]: функция представима булевым полиномом степени не выше $n-1$ тогда и только тогда, когда у неё чётное число наборов, на которых она принимает значение 1.

В нашем случае эти утверждения доказывают теорему 3 (для рассматриваемой матрицы), поскольку множество можно раскрасить произвольным образом с помощью допустимых k -раскрасок тогда и только тогда, когда не существует вектора из ортогонального пространства с ненулевыми элементами на этом множестве, т.е. нет ненулевой суммы булевых кубов размерности $k+1$, множество закрасенных пикселей (единичных элементов) которой содержится в этом множестве.

В общем случае (при произвольных размерах матрицы) доказательство аналогичное, надо только выполнить перекодировку, как показано на рис. 31–32. Она сводит задачу к

⁷ Логачёв О.А., Сальников А.А., Яценко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии - М.: МЦНМО, 2004.

рассмотренному случаю: элементы исходной матрицы отображаются булевы векторы, т.е. в элементы $2 \times \dots \times 2$ -матрицы. Вектор ортогонального пространства с ненулевыми элементами на рассматриваемом множестве может быть только линейной комбинацией булевых кубов, все вершины которых имеют прообраз при такой кодировке⁸.

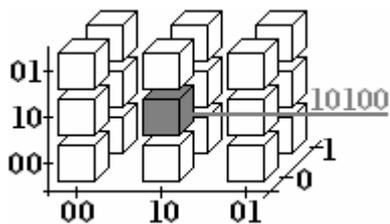


Рис. 31.

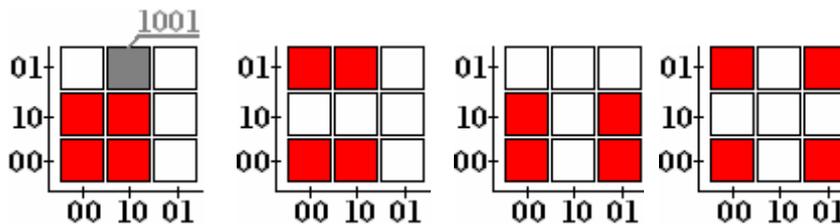


Рис. 32.

На рис. 32 показан базис ортогонального пространства при 1-раскрасках, это 2×2 -матрицы с одной общей вершиной (их линейной комбинацией можно получить любую 2×2 -подматрицу), см. замечание к теореме 1.

Следствие. *Если не все возможные раскраски множества являются допустимыми k -раскрасками, то существует элемент множества, который нельзя закрасить k -раскраской, оставив остальные элементы незакрашенными.*

Невозможность реализовать все возможные раскраски с помощью k -раскрасок эквивалентна линейной зависимости строк бинарной матрицы (см. табл. 2–3), т.е. сумма строк по модулю 2 равна нулю, поэтому вектор, который равен единице в одной из таких строк и нулю в остальных позициях не может быть получен линейной комбинацией столбцов, т.е. не соответствует никакой k -раскраске. Например, на рис. 6 пиксель С можно закрасить, оставляя остальные пиксели незакрашенными, а вот другие пиксели – нельзя.

Теорема 4. *Двухмерное множество можно раскрасить произвольным образом с помощью допустимых 1-раскрасок тогда и только тогда, когда матрица попарных расстояний Хэмминга⁹ (или попарных l_1 -расстояний) элементов множества не вырождена.*

Оставим теорему без доказательства. Заметим, что она даёт критерий наличия подмножеств рис. 5. Хорошо известен геометрический смысл вырожденности матрицы и что такое расстояние. Но вот геометрический смысл вырожденности матрицы попарных расстояний Хэмминга... оказывается, описывается в виде сумм квадратов. Например, P_1 – матрица попарных расстояний Хэмминга элементов квадрата (т.е., например, множества $\{(i,t), (i,s), (j,t), (j,s)\}$ при $i \neq j, t \neq s$), P_2 – конфигурации рис. 30 (ниж.):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(P_1) = 0, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det(P_2) = 6.$$

Видно, что на многомерный случай теорема напрямую не обобщается (конфигурация на рис. 30 является суммой трёх квадратов), однако справедлив следующий результат

Теорема 5. *Если матрица k -х степеней попарных расстояний Хэмминга (или попарных l_1 -расстояний) элементов множества вырождена, то существует раскраска множества, которая не является допустимой k -раскраской.*

Проблема. Можно ли получить критерий в терминах матриц попарных расстояний? Получить аналогичные результаты для других способов «раскраски бинарных матриц».

⁸ Тут есть тонкость: доказательство справедливо из-за удачного выбора кодировки.

⁹ Расстояние Хэмминга между двумя векторами – число координат, в которых они различаются. В данном случае имеется в виду расстояние между векторами индексов элементов.